Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана

Методические указания

Д.А. Мельников,
А.В. Неклюдов, К.В. Титов

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ И ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Издательство МГТУ имени Н.Э. Баумана

Глава I. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ I-ГО РОДА

§ I. Определение криволинейного интеграла I-го рода

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных x, y, z задана кусочно-гладкая кривая $\overset{\frown}{AB}$. Выберем на ней точки $A_0 = A$, A_1, $A_2, \dots, A_n = B$ (рис. I).

Определение. Набор элементарных дуг $l_k = \overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$, $k = 1, \dots, n$, называется разбиением T дуги $\overset{\frown}{AB}$.

Обозначим длину элементарной дуги l_k так: Δl_k.

Определение. Диаметром разбиения $d(T)$ называется максимальная длина элементарной дуги, входящей в разбиение T:

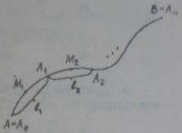

Рис. I

$$d(T) = \max_{k=1,\dots,n} \Delta l_k .$$

На каждой элементарной дуге l_k выберем произвольным образом точку M_k. Пусть на дуге $\overset{\frown}{AB}$ задана функция $f(x, y, z)$.

Определение. Интегральной суммой функции f, соответствующей разбиению T и набору точек $M_1, \dots, M_n$, называется сумма

$$I(f, T) = \sum_{k=1}^{n} f(M_k) \cdot \Delta l_k .$$

Определение. Криволинейным интегралом I-го рода от функции f по дуге $\overset{\frown}{AB}$ называется предел интегральных сумм $I(f, T)$ при стремлении диаметра разбиения к 0, если он существует и не зависит от способа разбиения дуги $\overset{\frown}{AB}$ и выбора точек M_k:

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\, dl = \lim_{d(T)\to 0} I(f, T). \qquad (I.1)$$

Если предел (I.1) существует, то функция f называется интегрируемой по дуге $\overset{\frown}{AB}$.

Аналогично определяется криволинейный интеграл I-го рода по дуге на плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных x, y.

Теорема. Пусть функция $f(x, y, z)$ непрерывна на кривой $\overset{\frown}{AB}$. Тогда интеграл $\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\, dl$ существует.

§ 2. Свойства криволинейного интеграла I-го рода

1. Линейность. Если функции f, g интегрируемы по $\breve{AB}$, то функции $f+g$, cf, где $c = const$, также интегрируемы по $\breve{AB}$ и

$$\int\limits_{\breve{AB}} (f+g)\,dl = \int\limits_{\breve{AB}} f\,dl + \int\limits_{\breve{AB}} g\,dl,$$

$$\int\limits_{\breve{AB}} cf\,dl = c\int\limits_{\breve{AB}} f\,dl.$$

2. Аддитивность. Пусть точка C лежит на $\breve{AB}$, функция f интегрируема по $\breve{AC}$ и $\breve{CB}$. Тогда f интегрируема по $\breve{AB}$ и

$$\int\limits_{\breve{AB}} f\,dl = \int\limits_{\breve{AC}} f\,dl + \int\limits_{\breve{CB}} f\,dl.$$

3. Независимость от направления прохождения кривой. Если f интегрируема по $\breve{AB}$, то

$$\int\limits_{\breve{AB}} f\,dl = \int\limits_{\breve{BA}} f\,dl.$$

4. Теорема об оценке. Если функция f интегрируема по $\breve{AB}$ и для любой точки P на $\breve{AB}$ $m \le f(P) \le M$, то $ml \le \int\limits_{\breve{AB}} f\,dl \le Ml$, где l – длина кривой $\breve{AB}$.

5. Теорема о среднем. Если функция f непрерывна на $\breve{AB}$, то существует такая точка $P \in \breve{AB}$, что

$$\int\limits_{\breve{AB}} f\,dl = f(P)\cdot l.$$

§ 3. Вычисление криволинейного интеграла I-го рода

1. Пусть кривая $\breve{AB}$ (рис. 2) задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t);$$

$$y = y(t);$$

$$z = z(t);\quad \alpha \le t \le \beta.$$

Тогда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y,z)\,dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\,dt, \tag{1.2}$$

где $\quad \dot{x}=\dfrac{dx}{dt},\ \dot{y}=\dfrac{dy}{dt},\ \dot{z}=\dfrac{dz}{dt}.$

Пример 1.1. Найти $\int_C x^2\,dl$, где C - окружность $x^2+y^2=4$.
Зададим окружность параметрическими уравнениями

$$x=2\cos t;$$
$$y=2\sin t;\quad 0\le t\le 2\pi.$$

Применим формулу (1.2):

$$\int\limits_C x^2 dl=\int\limits_0^{2\pi} 4\cos^2 t\sqrt{4\sin^2 t+4\cos^2 t}\,dt=8\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=$$
$$=4\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)\,dt=8\pi.$$

2. Пусть кривая AB задана уравнением $y=y(x),\ a\le x\le b$ в декартовой системе координат (рис. 3). Тогда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x,y)\,dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx. \tag{1.3}$$

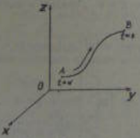

Рис. 2

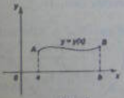

Рис. 3

Пример 1.2. Найти $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x\,dl$, где $\overset{\frown}{AB}$ - дуга параболы $y=x^2$, $A(0,0)$, $B(1,1)$.

По формуле (1.3) $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} x\,dl=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx=$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 \sqrt{1+4x^2}\,d(1+4x^2) = \frac{1}{12}(1+4x^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}.$$

3. Пусть кривая $\breve{AB}$ задана уравнением $r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$ в полярной системе координат. Тогда

$$\int\limits_{\breve{AB}} f(x,y)\,dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\varphi,\, r\sin\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi. \qquad (1.4)$$

Пример 1.3. Найти $\int\limits_{\breve{AB}} \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где $\breve{AB}$ - второй виток спирали Архимеда $r=2\varphi$ (рис. 4).

Точкам A и B соответствуют значения полярного угла $\alpha=2\pi$ и $\beta=4\pi$. По формуле (1.4)

$$\int\limits_{\breve{AB}} \sqrt{x^2+y^2}\,dl = \int\limits_{2\pi}^{4\pi} 2\varphi\sqrt{4\varphi^2+4}\,d\varphi = 4\int\limits_{2\pi}^{4\pi} \varphi\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3}(\varphi^2+1)^{3/2}\Big|_{2\pi}^{4\pi} = \frac{4}{3}\left[(16\pi^2+1)^{3/2}-(4\pi^2+1)^{3/2}\right].$$

4. Пусть пространственная кривая задана общими уравнениями. В этом случае уравнения кривой приводятся к параметрическому виду и используется формула (1.2).

Пример 1.4. Найти $\int\limits_{\breve{AB}} xy\,dl$, где $\breve{AB}$ - часть сечения цилиндра $x^2+y^2=1$ плоскостью $z=x+1$, лежащая в первом октанте (рис. 5).

Рис. 4

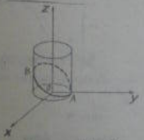

Рис. 5

В цилиндрических координатах $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$ уравнения кривой $\breve{AB}$ имеют вид

$r = 1;$

$z = r\cos\varphi + 1,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

Следовательно, $\breve{AB}$ задается параметрическими уравнениями

$x = \cos\varphi;$

$y = \sin\varphi;$

$z = 1 + \cos\varphi,\quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$

По формуле (1.2)

$$\int\limits_{\breve{AB}} xy\,dl = \int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi \cdot \sin\varphi \sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \sin^2\varphi}\,d\sin^2\varphi = \frac{1}{3}(1 + \sin^2\varphi)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}.$$

§ 4. Приложения криволинейного интеграла I-го рода

1. Масса M материальной кривой $\breve{AB}$ с плотностью $\mu(x, y)$ вычисляется по формуле

$$M = \int\limits_{\breve{AB}} \mu(x, y, z)\,dl.$$

Пример I.5. Найти массу четверти лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, если плотность выражается формулой $\mu(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

Масса

$$M = k\int\limits_{\breve{AB}} r\,dl = k\int\limits_0^{\pi/4} a\sqrt{\cos 2\varphi}\left(a^2\cos 2\varphi + \frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}\right)^{1/2} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{4}\pi k a^2.$$

2. Статические моменты и координаты центра масс. Пусть плоская материальная кривая $\breve{AB}$ имеет плотность $\mu(x, y)$. Статический момент относительно оси Ox определяется по формуле $M_x = \int\limits_{\breve{AB}} y\mu(x, y)\,dl,$

относительно оси Oy : $M_y = \int\limits_{\breve{AB}} x\mu(x,y)\,dl$.

Статические моменты пространственной кривой относительно координатных плоскостей вычисляются аналогично по формулам

$$M_{xy} = \int\limits_{\breve{AB}} z\mu\,dl, \quad M_{xz} = \int\limits_{\breve{AB}} y\mu\,dl, \quad M_{yz} = \int\limits_{\breve{AB}} x\mu\,dl.$$

Координаты центра масс могут быть найдены по формулам: для плоской кривой

$$x_c = \frac{M_y}{M}, \quad y_c = \frac{M_x}{M};$$

для пространственной кривой

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M}, \quad y_c = \frac{M_{xz}}{M}, \quad z_c = \frac{M_{xy}}{M},$$

где M - масса кривой.

Пример I.6. Найти центр масс четверти однородной окружности $x^2 + y^2 = a^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Можно считать, что $\mu = 1$. Тогда масса кривой равна ее длине: $M = \frac{2\pi a}{4} = \frac{\pi a}{2}$. Статический момент

$$M_x = \int\limits_{\breve{AB}} y\,dl = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx = a^2.$$

Из соображений симметрии $M_y = M_x$. Тогда координаты центра масс равны $x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{2a}{\pi}$, $y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{2a}{\pi}$.

3. Моменты инерции. Моменты инерции плоской кривой $\breve{AB}$ с плотностью μ относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$I_x = \int\limits_{\breve{AB}} y^2\mu\,dl, \quad I_y = \int\limits_{\breve{AB}} x^2\mu\,dl;$$

момент инерции относительно начала координат

$$I_0 = \int\limits_{\breve{AB}} (x^2 + y^2)\mu\,dl = I_x + I_y.$$

В случае пространственной кривой моменты инерции относительно координатных осей и начала координат определяются по формулам

$$I_x=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(y^2+z^2)\mu\,dl,\quad I_y=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(x^2+z^2)\mu\,dl,$$

$$I_z=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(x^2+y^2)\mu\,dl,\quad I_0=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(x^2+y^2+z^2)\mu\,dl=\frac{I_x+I_y+I_z}{2}$$

Пример 1.7. Найти момент инерции относительно оси Oz однородной винтовой линии ($\mu=1$) $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=at$; $0\le t\le 2\pi$.

Определим

$$I_z=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(x^2+y^2)dl=\int\limits_0^{2\pi}(a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t)\cdot$$

$$\cdot\sqrt{a^2+a^2\sin^2 t+a^2\cos^2 t}\,dt=a^3\sqrt{2}\int\limits_0^{2\pi}dt=$$

$$=2\sqrt{2}\,\pi a^3.$$

Глава 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ 2-ГО РОДА

§ 1. Определение криволинейного интеграла 2-го рода

Пусть на кривой $\overset{\frown}{AB}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ задано векторное поле $\bar{F}=P(x,y,z)\bar{i}+Q(x,y,z)\bar{j}+R(x,y,z)\bar{k}$. Пусть T - разбиение $\overset{\frown}{AB}$ на элементарные дуги $l_k=\overset{\frown}{A_{k-1}A_k}$, $k=1,\dots,n$; $M_k\in l_k$. Обозначим $\Delta\bar{l}_k$ вектор $\overline{A_{k-1}A_k}=\Delta x_k\bar{i}+\Delta y_k\bar{j}+\Delta z_k\bar{k}$ (рис. 6).

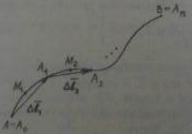

Рис. 6

Составим интегральную сумму $I(\bar F,T)=\sum_{k=1}^{n}(\bar F(M_k),\Delta\bar l_k)$ (под знаком суммы стоит скалярное произведение векторов).

Определение. Криволинейным интегралом векторного поля $\bar F$ по кривой $\overset{\frown}{AB}$ называется предел интегральных сумм $I(\bar F,T)$ при стремлении диаметра разбиения к 0, если он существует и не зависит от способа разбиения кривой и выбора точек M_k :

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\bar F d\bar l=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}Pdx+Qdy+Rdz=\lim_{d(T)\to 0}I(\bar F,T).$$

Если начало кривой совпадает с ее концом, то говорят, что интеграл берется по замкнутому контуру C , и используют обозначение $\oint_C \bar F d\bar l$.

Теорема. Пусть функции P , Q , R непрерывны на кривой $\overset{\frown}{AB}$, $\bar F=P\bar i+Q\bar j+R\bar k$. Тогда интеграл $\int_{\overset{\frown}{AB}}\bar F d\bar l$ существует.

В дальнейшем координаты векторных полей будем предполагать непрерывными функциями.

§ 2. Свойства криволинейного интеграла 2-го рода

I. Линейность:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}(\bar F+\bar G)d\bar l=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\bar F d\bar l+\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\bar G d\bar l,$$

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}c\bar F d\bar l=c\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\bar F d\bar l,\quad c=\mathrm{const}.$$

2. Аддитивность. Пусть точка C лежит на $\overset{\frown}{AB}$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\bar F d\bar l=\int\limits_{\overset{\frown}{AC}}\bar F d\bar l+\int\limits_{\overset{\frown}{CB}}\bar F d\bar l.$$

3. Зависимость от направления прохождения кривой:

$$\int\limits_{\overset{\frown}{BA}}\bar F d\bar l=-\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\bar F d\bar l.$$

4. Связь между криволинейными интегралами I-го рода и 2-го рода. Пусть $\bar\tau(M)=\cos\alpha\cdot\bar i+\cos\beta\cdot\bar j+\cos\gamma\cdot\bar k$ - векторное поле, касательное к кривой $\overset{\frown}{AB}$ в каждой точке $M\in\overset{\frown}{AB}$, $|\bar\tau(M)|=1$ и направление вектора $\bar\tau(M)$ совпадает с направлением обхода $\overset{\frown}{AB}$ (рис. 7). Тогда

$$\int\limits_{\breve{AB}} \bar{F}d\bar{l} = \int\limits_{\breve{AB}} (\bar{F},\bar{\tau})dl = \int\limits_{\breve{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dl =$$

$$= \int\limits_{\breve{AB}} \text{Пр.}_{\bar{\tau}}\bar{F}\,dl.$$

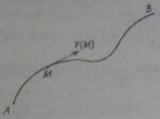

Рис. 7

§ 3. <u>Вычисление криволинейного интеграла 2-го рода</u>

I. Пусть кривая $\breve{AB}$ задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t);$$
$$y = y(t);$$
$$z = z(t), \quad \alpha \le t \le \beta;$$

$$A(x(\alpha),\ y(\alpha),\ z(\alpha)).$$

$$B(x(\beta),\ y(\beta),\ z(\beta)).$$

Тогда

$$\int\limits_{\breve{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\Big[P(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} +$$

$$+ Q(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + R(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}\Big]dt$$

<u>Пример 2.I</u>. Найти $\int\limits_{\breve{AB}} ydx - xdy + zdz$, где $\breve{AB}$ - виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = at$, $0 \le t \le 2\pi$

Вычислим

$$\int_{\breve{AB}} y\,dx - x\,dy + z\,dz = \int_0^{2\pi} (a\sin t\cdot(-a\sin t) -$$

$$- a\cos t\cdot a\cos t + at\cdot a)dt = a^2\int_0^{2\pi}(t-1)\,dt = 2a^2(\pi^2-\pi).$$

2. Пусть плоская кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y=y(x)$, $A(a, y(a))$, $B(b, y(b))$. Тогда

$$\int_{\breve{AB}} P\,dx + Q\,dy = \int_a^b \left(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\,y'(x)\right)dx.$$

Пример 2.2. Найти $\int_{\breve{AB}} (x+y)\,dx + y^2\,dy$ по кривой (рис. 8)

$y=0,\ 0 \le x \le 1;$

$y = \ln x,\ 1 \le x \le e.$

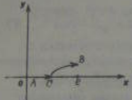

Рис. 8

Пользуясь свойством аддитивности, разобьем интеграл на сумму:

$$\int_{\breve{AB}} (x+y)\,dx + y^2\,dy =$$

$$= \int_{\breve{AC}} (x+y)\,dx + y^2\,dy + \int_{\breve{CB}} (x+y)\,dx + y^2\,dy =$$

$$= \int_0^1 (x+0)\,dx + \int_1^e \left(x + \ln x + \ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\right)dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} + x\ln x - x + \frac{\ln^3 x}{3}\right)\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} + \frac{4}{3}.$$

Пример 2.3. Найти $\oint_C x(1-y)\,dx + x\,dy$, где C - окружность $x^2+y^2=4$, проходимая в положительном направлении (против часовой стрелки).

Параметризуем окружность: $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Тогда $\oint_C x(1-y)\,dx + x\,dy = \int_0^{2\pi} (2\cos t\,(1-2\sin t)(-2\sin t) +$

$$+ 2\cos t\cdot 2\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi} (-4\cos t\cdot\sin t + 8\cos t\cdot\sin^2 t +$$

$$+4\cos^2 t)dt = (-2\sin^2 t + \frac{8}{3}\sin^3 t +$$
$$+2t + \sin 2t)\Big|_0^{2\pi} = 4\pi .$$

3. Интеграл от полного дифференциала. Если подынтегральное выражение (дифференциальная форма) является полным дифференциалом функции $u(x,y,z)$, т.е. $P=\frac{\partial u}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial u}{\partial y}$, $R=\frac{\partial u}{\partial z}$;

$$Pdx+Qdy+Rdz=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz=du ,$$

то
$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} du(x,y,z)=u(B)-u(A).$$

Таким образом, интеграл от полного дифференциала зависит только от начальной и конечной точек кривой $\overset{\frown}{AB}$, но не зависит от пути, соединяющего точки A и B. Интеграл по замкнутому контуру от полного дифференциала равен 0:

$$\oint\limits_C du(x,y,z)=u(A)-u(A)=0.$$

Функция $u(x,y,z)$ может быть найдена двумя способами.

Способ I. В качестве контура интегрирования возьмем ломаную $P_0P_1P_2M$ (рис. 9), где $P_0(x_0,y_0,z_0)$ – фиксированная точка, $M(x,y,z)$ – переменная точка. Тогда вдоль P_0P_1 имеем $y=y_0$, $z=z_0$, $dy=0$, $dz=0$. Аналогично вдоль P_1P_2 $dx=dz=0$, вдоль P_2M $dx=dy=0$. Получаем

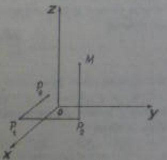

Рис. 9

$$u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)=$$

$$=\int\limits_{P_0M} Pdx+Qdy+Rdz=$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz$$

Способ 2. Так как $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$, то $u(x, y, z)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y, z);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y, z);$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R(x, y, z).$$

Интегрируем первое уравнение, считая y и z постоянными: $u(x, y, z) = \int P(x, y, z)\,dx$. Так как в правой части стоит неопределенный интеграл, то это равенство определяет $u(x, y, z)$ с точностью до слагаемого, зависящего от y и z:

$$u(x, y, z) = u_1(x, y, z) + \varphi(y, z).$$

Функцию $\varphi(y, z)$ находим, подставляя $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ во второе и третье уравнения системы.

Прежде чем определять функцию $u(x, y, z)$, необходимо убедиться в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом. Дифференциальная форма двух переменных $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, заданная в односвязной области, является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Дифференциальная форма трех переменных $P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$, заданная в односвязной области, является полным дифференциалом тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \tag{2.1}$$

Пример 2.4. Найти $\int\limits_{AB} \pi \cos\pi (x + y^2 z)\,dx + (2\pi yz \cos\pi (x + y^2 z) + 2z^2)dy + (\pi y^2 \cos\pi (x + y^2 z) + 6yz^2)dz$.

где $A(0,0,0)$, $B(3,1,1)$.

Проверим, что дифференциальная форма задачи является полным дифференциалом. Имеем $P = \pi\cos\pi(x + y^2 z)$,

$$Q = 2\pi yz\cos\pi(x+y^2z) + 2z^3,$$

$$R = \pi y^2\cos\pi(x+y^2z) + 6yz^2;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2\pi^2 yz\sin\pi(x+y^2z) = \frac{\partial P}{\partial y};$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} = 2\pi y\cos\pi(x+y^2z) - 2\pi^2y^3z\sin\pi(x+y^2z) + 6z^2 = \frac{\partial Q}{\partial z};$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\pi^2y^2\sin\pi(x+y^2z) = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Условия (2.1) выполнены. Найдем значение интеграла двумя способами.

Способ 1. Выберем в качестве пути интегрирования ломаную AP_1P_2B, где $P_1(3,0,0)$, $P_2(3,1,0)$. Тогда на $\overline{AP_1}$ $y = z = 0$, $P = \pi\cos\pi x$; на $\overline{P_1P_2}$ $x = 3$, $z = 0$, $Q = 0$; на $\overline{P_2B}$ $x = 3$, $y = 1$, $R = \pi\cos\pi(3+z) + 6z^2$. Таким образом,

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{AP_1} Pdx + \int\limits_{P_1P_2} Qdy + \int\limits_{P_2B} Rdz =$$

$$= \int_0^3 \pi\cos\pi x\,dx + \int_0^1 0\cdot dy + \int_0^1 (\pi\cdot\cos\pi(3+z) + 6z^2)dz =$$

$$= \sin\pi x\Big|_0^3 + \sin\pi(3+z)\Big|_0^1 + 2z^3\Big|_0^1 = 0 + 0 + 2 = 2$$

Способ 2. Составим систему

$$\frac{\partial u}{\partial x} = P = \pi\cos\pi(x + zy^2);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = 2\pi yz\cos\pi(x + zy^2) + 2z^3;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = R = \pi y^2\cos\pi(x + zy^2) + 6yz^2.$$

Из первого уравнения $u(x,y,z) = \pi\int\cos\pi(x+zy^2)\partial x = \sin\pi(x + zy^2) + \varphi(y,z)$. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2\pi z y \cos\pi(x+zy^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \pi y^2 \cos\pi(x+zy^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Подставляя найденные выражения для $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ во второе и третье уравнения системы, получим

$$2\pi z y \cos(x+zy^2)\pi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2\pi z y \cos\pi(x+zy^2) + 2z^3;$$

$$\pi y^2 \cos\pi(x+zy^2) + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \pi y^2 \cos\pi(x+zy^2) + 6yz^2,$$

т.е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2z^3;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 6yz^2.$$

Из первого уравнения этой системы $\varphi(y,z) = 2z^3 \int dy = 2z^3 y + \psi(z)$. Отсюда $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 6z^2 y + \psi'(z)$. Подставляя во второе уравнение системы, находим $\psi'(z) = 0$, т.е. $\psi = C - \text{const}$. Итак, $\varphi(y,z) = 2z^3 y + C$, $u(x,y,z) = \sin\pi(x+zy^2) + 2z^3 y + C$. Тогда

$$\int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = u(3,1,1) - u(0,0,0) =$$

$$= (\sin 4\pi + 2) - (\sin 0 + 0) = 2.$$

4. Вычисление интеграла по замкнутому контуру с помощью формулы Грина. Пусть C - замкнутый кусочно-гладкий контур на плоскости xOy, ограничивающий область D. Пусть функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D} = D \cup C$. Тогда справедлива формула Грина

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy. \qquad (2.2)$$

при этом направление обхода контура - положительное (рис. 10).

Пример 2.5. Вычислить $\oint\limits_C (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, где C - контур, образованный дугой синусоиды и отрезком оси Ox при $0 \le x \le \pi$ (рис. 11). Направление обхода - положительное.

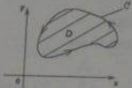

Рис. 10

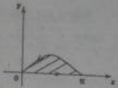

Рис. 11

Здесь $P = (x+y)^2$, $Q = -(x-y)^2$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = -2(x-y)$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2(x+y)$. По формуле (2.2)

$$\oint\limits_C (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy = -4 \iint\limits_D x\,dx\,dy =$$

$$= -4 \int\limits_0^{\pi} x\,dx \int\limits_0^{\sin x} dy = -4 \int\limits_0^{\pi} x \sin x\,dx =$$

$$= -4\left(-x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} \cos x\,dx\right) = -4\pi.$$

§ 4. Приложения криволинейного интеграла 2-го рода

Физический смысл криволинейного интеграла 2-го рода - работа силового поля $\overline{F}$ по перемещению материальной точки по дуге $\overset{\frown}{AB}$.

Пример 2.6. Вычислить работу поля $\overline{F} = y\overline{i} - x\overline{j}$ при перемещении материальной точки вдоль нижней половины эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ из точки $A(a,0)$ в точку $B(-a,0)$.

Параметрические уравнения эллипса:

$x = a \cos t$;

$y = b \sin t$.

Значения t_1 и t_2 параметра t в точках A и B соответственно равны 0 и $-\pi$. Работа

$$A_p = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \bar{F}\,d\bar{l} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} y\,dx - x\,dy = \int\limits_0^{-\pi} [b\sin t(-a\sin t) -$$

$$- a\cos t\,(b\cos t)]\,dt = -ab\int\limits_0^{-\pi} dt = \pi a b.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $\int\limits_C \frac{y\,dl}{x+3z}$, где C – дуга кривой

$$x = t;\quad y = 2t^2;\quad z = \frac{8}{3}t^3,\ 0 \le t \le 1.$$

2. Найти $\int\limits_C \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+9}}$, где C – отрезок прямой $y = 5x,\ 0 \le x \le 1$.

3. Найти $\int\limits_C \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2}}$, где C – дуга кардиоиды

$$r = 1+\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$$

4. Найти массу дуги кривой

$$x = e^t\cos t;\quad y = 2e^t\sin t;\quad z = e^t,\ \ 0 \le t \le 2\pi$$

с плотностью $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{2+\dfrac{xy}{z^2}}}$.

5. Найти момент инерции относительно начала координат лемнискаты $r^2 = \cos 2\varphi$ с плотностью $\mu = \frac{1}{r}$.

6. Найти $\int\limits_C y^2dx + x^2dy$, где C – дуга параболы

$$y = 2x^2,\ 0 \le x \le 1.$$

7. Найти $\int\limits_C 3z\,dx + x\,dy + 2y\,dz$, где C – дуга кривой

$$x = t;\quad y = \frac{t^2}{2};$$

$$z = \frac{t^3}{3}, \quad 0 \le t \le 1.$$

8. Найти работу силового поля $\vec{F} = (2-y)\vec{i} + x\vec{j}$ по перемещению точки по арке циклоиды

$$x = t - \sin t;$$

$$y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

9. Найти $\int\limits_{AB} \frac{z\cos x}{y^2}\,dx - \frac{2z\sin x}{y^3}\,dy + \frac{\sin x}{y^2}\,dz$,

где $A(0, 1, 0)$, $B(\frac{\pi}{2}, 2, 1)$, убедившись в том, что под интегралом стоит полный дифференциал.

10. Найти $\int\limits_{AB} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$,

где $A(-2, -1)$, $B(3, 0)$, убедившись в том, что подынтегральное выражение - полный дифференциал.

11. Найти $\oint\limits_C (x+y)^2\,dx - (x^2+y^2)\,dy$, где C - пробегаемый в положительном направлении контур треугольника с вершинами $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$. Ответ проверить по формуле Грина.

Глава 3. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ I-ГО РОДА

§ I. Определение поверхностного интеграла I-го рода

Определение. Разбиением T поверхности σ называется множество ее участков $\Delta\sigma_k$, $k = 1, \dots, n$ таких, что объединение всех $\Delta\sigma_k$ равно σ, а пересечение двух различных участков $\Delta\sigma_i$ и $\Delta\sigma_j$, $i \ne j$ есть либо кусочно-гладкая кривая, либо пустое множество (рис. 12).

Рассматриваемые поверхности будем предполагать ограниченными и кусочно-гладкими.

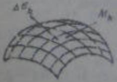

Рис. 12

Диаметром множества K из $\mathbb{R}^3$ называется число $d(K) = \sup |AB|$, где верхняя грань берется по всем точкам A и B, принадлежащим множеству K.

Определение. Диаметром разбиения T называется наибольший из диаметров элементарных поверхностей $\Delta\sigma_k$:

$$d(T)=\max_{k=1,\dots,n} d(\Delta\sigma_k).$$

Пусть на поверхности определена функция $f(x,y,z)$. Выберем на каждой элементарной поверхности $\Delta\sigma_k$ произвольную точку $M_k(x_k,y_k,z_k)$, $k=1,\dots,n$.

Определение. Интегральной суммой функции $f(x,y,z)$, соответствующей разбиению T и выбору точек M_k, $k=1,\dots,n$, называется сумма

$$S(f,T)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\,\Delta S_k,$$

где ΔS_k - площадь элементарной поверхности $\Delta\sigma_k$.

Определение. Поверхностным интегралом I-го рода от функции $f(x,y,z)$ по поверхности σ называется предел интегральных сумм $S(f,T)$ при стремлении диаметра разбиения T к 0, если он существует и не зависит от способа разбиения поверхности и выбора точек M_k:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma=\lim_{d(T)\to 0} S(f,T).$$

Если предел интегральных сумм существует, то функция f называется интегрируемой по поверхности σ.

Замечание. Условие стремления диаметра разбиения к 0 является более сильным, чем условие стремления к 0 площадей всех элементарных поверхностей $\Delta\sigma_k$: из того, что $\max_{k=1,\dots,n}\Delta S_k\to 0$ не следует, что $d(T)\to 0$.

Теорема. Пусть функция f непрерывна на поверхности σ. Тогда f интегрируема по поверхности σ.

§ 2. Свойства поверхностного интеграла I-го рода

1. Линейность. Если функции f и g интегрируемы по σ, то функции $f+g$ и cf, где $c=\mathrm{const}$ также интегрируемы по σ и

$$\iint_\sigma (f+g)\,d\sigma=\iint_\sigma f\,d\sigma+\iint_\sigma g\,d\sigma,$$

$$\iint_\sigma cf\,d\sigma=c\iint_\sigma f\,d\sigma.$$

2. Аддитивность. Пусть поверхности σ_1 и σ_2 - непересекающиеся, т.е. их пересечение является объединением конечного числа кусочно-гладких кривых (в частности, оно может быть пустым). Тогда если f интегрируема по σ_1 и σ_2, то f интегрируема по $\sigma_1 \cup \sigma_2$ и

$$\iint\limits_{\sigma_1 \cup \sigma_2} f\,d\sigma = \iint\limits_{\sigma_1} f\,d\sigma + \iint\limits_{\sigma_2} f\,d\sigma .$$

3. Оценка интеграла. Если для всех точек $P(x,y,z)$ поверхности σ $m \le f(x,y,z) \le M$, $m, M = \text{const}$, то

$$mS \le \iint\limits_{\sigma} f\,d\sigma \le MS,$$

где S - площадь поверхности σ.

4. Теорема о среднем. Если функция f непрерывна на σ, то существует точка $P \in \sigma$, такая, что

$$\iint\limits_{\sigma} f\,d\sigma = f(P)\,S.$$

5. Связь с площадью поверхности. Если $f \equiv 1$ на σ, то $\iint\limits_{\sigma} f\,d\sigma = S$. При этом функция f может не быть тождественно равна единице вне σ. Например, если σ - сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$, то

$$\iint\limits_{\sigma} (x^2+y^2+z^2)\,d\sigma = R^2 \iint\limits_{\sigma} d\sigma = 4\pi R^4 .$$

§ 3. Вычисление поверхностного интеграла I-го рода

Пусть поверхность σ задана уравнением $\Phi(x,y,z)=0$. Предположим, что поверхность σ можно однозначно спроецировать на одну из координатных плоскостей, например, на плоскость xOy, причем проекцией σ является плоская область D (рис. 13). Тогда поверхность σ можно задать уравнением вида $z = z(x,y)$. Пусть функции $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ непрерывны в области D. Тогда

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint\limits_{D} f(x,y,z(x,y)) \times$$

$$\times\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

В правой части равенства стоит двойной интеграл по области D.

Пример 3.1. Найти $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{\dfrac{x}{2x-1}}\,d\sigma$, где σ - часть цилиндра $x^2+z^2=2x$, вырезаемая гиперболоидом $x^2-y^2+z^2=1$ и плоскостью $z=0$ ($z>0$).

Найдем проекцию поверхности σ на плоскость xOy (рис. 14).

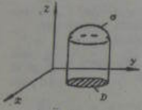

Рис. 13

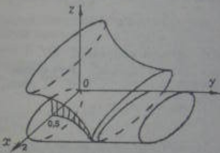

Рис. 14

Исключим из уравнений цилиндра и гиперболоида переменную z:

$$\left.\begin{aligned}&x^2+z^2=2x,\\&x^2-y^2+z^2=1\end{aligned}\right\}\Longrightarrow 2x=y^2+1.$$

Получено уравнение проекции линии пересечения двух поверхностей на xOy. Полагая в уравнении цилиндра $z=0$, получим уравнение линий пересечения цилиндра и плоскости $x^2=2x$. Таким образом, поверхность σ проецируется в область D, ограниченную параболой $x=\frac{1}{2}(y^2+1)$ и прямой $x=2$ (рис. 15). Часть цилиндра, удовлетворяющая условию $z>0$, задается уравнением $z=\sqrt{2x-x^2}$. Тогда $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}.$$

Таким образом,

$$\iint_{\sigma} \sqrt{\frac{x}{2x-1}}\, d\sigma = \iint_{D} \sqrt{\frac{x}{2x-1}}\, \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\, dx\, dy =$$

$$= 2 \int_{1/2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x-1}\sqrt{2-x}} \int_{0}^{\sqrt{2x-1}} dy = 2 \int_{1/2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} =$$

$$= 4\sqrt{2-x}\ \Big|_{2}^{1/2} = 4\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

В случае, когда функция f постоянна на поверхности σ, вычисление интеграла сводится к вычислению площади поверхности σ.

Пример 3.2. Найти $\iint_{\sigma} (z^4 - (x^2+y^2)^2 + 1)\, d\sigma$, где σ - часть конуса $z^2 = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостями $z = 0$ и $z = 1$ (рис. 16).

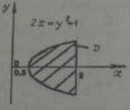

Рис. 15

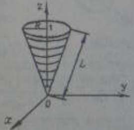

Рис. 16

Так как для конуса $(z(x,y))^4 = (x^2+y^2)^2$, то

$$\iint_{\sigma} (z^4 - (x^2+y^2)^2 + 1)\, d\sigma = \iint_{\sigma} d\sigma = \pi R L = \pi\sqrt{2},$$

где $R = 1$ - радиус основания, $L = \sqrt{2}$ - длина образующей конуса.

Пусть поверхность удобно задать либо уравнением $y = y(x,z)$, $(x,z) \in D_2$, либо $x = x(y,z)$, $(y,z) \in D_3$, где D_2 и D_3-проекции σ на координатные плоскости xOz и yOz соответственно. Тогда поверхностный интеграл I-го рода вычисляется соответственно по формулам

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_2} f(x,y(x,z),z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\,dx\,dz,$$

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_3} f(x(y,z),y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz.$$

Пример 3.3. Найти $\iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{1+4x}$, где σ - часть параболоида $x = y^2 + z^2$, отсекаемая плоскостью $x = 1$ (рис. 17).

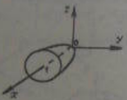

Рис. 17

Полагая в уравнении параболоида $x = 1$, получим $y^2 + z^2 = 1$ - уравнение проекции линии пересечения параболоида и плоскости на плоскость yOz. Таким образом, проекцией поверхности σ на yOz будет круг $\{y^2 + z^2 \leq 1\} = D$. Из уравнения параболоида имеем $x(y,z) = y^2 + z^2$, $\frac{\partial x}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial x}{\partial z} = 2z$.

Тогда

$$\iint_{\sigma} \frac{d\sigma}{1+4x} = \iint_{D} \frac{\sqrt{1+4y^2+4z^2}}{1+4y^2+4z^2}\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r\,dr}{\sqrt{1+4r^2}} =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4}\sqrt{1+4r^2}\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}(\sqrt{5}-1).$$

Если поверхность σ нельзя однозначно спроецировать ни на одну из трех координатных плоскостей, то ее разбивают на две (или более) поверхности, каждая из которых однозначно проецируется на одну из координатных плоскостей, т.е. может быть задана уравнением вида $z = z(x,y)$ либо $y = y(x,z)$, либо $x = x(y,z)$. По свойству аддитивности интеграл по всей поверхности σ равен сумме интегралов по частям, на которые она разбита.

Пример 3.4. Найти $\iint\limits_{\sigma} z\,|xy|\,d\sigma$, где σ - полная поверхность цилиндра $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.

Искомый интеграл равен сумме трех интегралов: по нижнему и верхнему основанию σ_1 и σ_2 и боковой поверхности σ_3 (рис. 18).

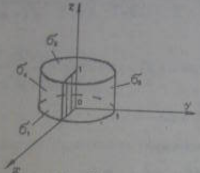

Рис. 18

Так как на нижнем основании $z = 0$, то

$$\iint\limits_{\sigma_1} z\,|xy|\,d\sigma = 0.$$

Для верхнего основания σ_2 имеем $z(x,y)=1$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, поэтому поверхностный интеграл по σ_2 совпадает с двойным интегралом от функции $z(x,y)\,|xy| = |xy|$, взятым по кругу $D = \{x^2+y^2 \leq 1\}$:

$$\iint\limits_{\sigma_2} z\,|xy|\,d\sigma = \iint\limits_{D} |xy|\,dx\,dy = 4\int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\,\sin\varphi\,d\varphi \cdot$$

$$\cdot \int\limits_0^1 r^3\,dr = 4\,\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Найдем интеграл по боковой поверхности σ_3. Она состоит из двух частей: σ_4 и σ_5, симметричных относительно плоскости xOz. Так как функция $z\,|xy|$ - четная по y, то

$$\iint\limits_{\sigma_3} z\,|xy|\,d\sigma = 2\iint\limits_{\sigma_5} z\,|xy|\,d\sigma.$$

Проекция σ_5 на плоскость xOz - прямоугольник $D:\ -1 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Уравнение σ_5:

$$y=\sqrt{1-x^2},\ \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда

$$\iint_{\sigma_3} z\,|xy|\,d\sigma=2\iint_D z\,|x|\sqrt{1-x^2}\,\frac{dx\,dz}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\int_0^1 4z\,dz\int_0^1 x\,dx=1.$$

Окончательно получаем

$$\iint_{\sigma} z\,|xy|\,d\sigma=0+\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}.$$

Пример 3.5. Найти $\iint_{\sigma} x^2\,d\sigma$, где σ - сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Очевидно, что для сферы $\iint_{\sigma} x^2 d\sigma=\iint_{\sigma} y^2 d\sigma=\iint_{\sigma} z^2 d\sigma$.

Тогда

$$\iint_{\sigma} x^2 d\sigma=\frac{1}{3}\iint_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)\,d\sigma=\frac{1}{3}R^2\iint_{\sigma} d\sigma=\frac{4\pi R^4}{3}.$$

Пример 3.5 показывает, как использование соображений симметрии позволяет существенно упростить вычисление поверхностного интеграла.

§ 4. Механические и физические приложения поверхностного интеграла I-го рода

1. Масса поверхности. Пусть на поверхности σ распределена масса с поверхностной плотностью $\mu(x,y,z)$. Тогда масса поверхности

$$M=\iint_{\sigma}\mu(x,y,z)\,d\sigma.$$

2. Статические моменты и центр масс. Статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей yOz, xOz, xOy соответственно

$$M_{yz} = \iint_{\sigma} x\mu \, d\sigma, \quad M_{xz} = \iint_{\sigma} y\mu \, d\sigma,$$

$$M_{xy} = \iint_{\sigma} z\mu \, d\sigma.$$

Координаты центра масс поверхности σ

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{M}, \quad y_0 = \frac{M_{xz}}{M}, \quad z_0 = \frac{M_{xy}}{M}.$$

3. Моменты инерции. Момент инерции поверхности σ относительно прямой L:

$$I_L = \iint_{\sigma} r_L^2 \mu \, d\sigma,$$

где $r_L = r_L(x, y, z)$ – расстояние от точки (x, y, z), лежащей на поверхности σ, до прямой L. Моменты инерции относительно координатных осей Ox, Oy, Oz:

$$I_x = \iint_{\sigma} (y^2 + z^2) \mu \, d\sigma,$$

$$I_y = \iint_{\sigma} (x^2 + z^2) \mu \, d\sigma,$$

$$I_z = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2) \mu \, d\sigma.$$

Момент инерции относительно точки $P(x_0, y_0, z_0)$:

$$I_P = \iint_{\sigma} \left[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \right] \mu(x, y, z) \, d\sigma.$$

Момент инерции относительно начала координат

$$I_0 = \iint_{\sigma} (x^2 + y^2 + z^2) \mu(x, y, z) \, d\sigma = \frac{1}{2} (I_x + I_y + I_z).$$

Пример 3.6. Найти координаты центра масс полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$, если поверхностная плотность в каждой точке сферы равна расстоянию от этой точки до оси Oz.

Масса полусферы σ :

$$M=\iint_{\sigma}\mu\, d\sigma=\iint_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}\, d\sigma=\iint_{x^2+y^2<R^2}\sqrt{x^2+y^2}\,\times$$

$$\times\sqrt{1+\left[\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)'_x\right]^2+\left[\left(\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)'_y\right]^2}\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{x^2+y^2<R^2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy=$$

$$=\iint_{x^2+y^2<R^2}\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R\frac{r^2\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=$$

$$=2\pi R\int_0^R\frac{r^2-R^2+R^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\,dr=2\pi R\left(R^2\arcsin\frac{r}{R}\Big|_0^R-\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,dr\right)=\frac{\pi^2R^3}{2}.$$

(Мы воспользовались тем, что интеграл $\int_0^R\sqrt{R^2-r^2}\,dr$ равен четверти площади круга радиусом R, т.е. $\frac{\pi R^2}{4}$.) Из соображений симметрии очевидно, что координаты центра масс x_C и y_C равны 0. Найдем z_C. Статический момент

$$M_{xy}=\iint_{\sigma}z\,\mu\, d\sigma=\iint_{x^2+y^2<R^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\times$$

$$\times\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{R\,dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\iint_{x^2+y^2<R^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy=$$

$$=2\pi R\int_0^R r^2\,dr=\frac{2\pi R^4}{3}.$$

Отсюда $z_C=\dfrac{M_{xy}}{M}=\dfrac{2\pi R^4}{3}\cdot\dfrac{2}{\pi^2R^3}=\dfrac{4R}{3\pi}$.

4. Приложения к задачам электростатики и гравитации. Если по поверхности σ распределены электрические заряды с поверхностной плотностью $\gamma(x, y, z)$, то общий заряд поверхности

$$Q=\iint_{\sigma}\gamma(x,y,z)\,d\sigma.$$

Потенциал электростатического поля, создаваемого заряженной поверхностью σ в точке (x_0, y_0, z_0):

$$U(x_0,y_0,z_0)=k_0\iint_{\sigma}\frac{\gamma(x,y,z)\,d\sigma}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \qquad (3.1)$$

где k_0 – коэффициент пропорциональности в законе Кулона, зависящий от системы единиц. На точечный заряд q, помещенный в точку (x_0, y_0, z_0), со стороны заряженной поверхности действует сила

$$\overline{F}=-q\,\overline{\operatorname{grad}}\,U(x_0,y_0,z_0)=-q\left(\frac{\partial U}{\partial x_0}\overline{i}+\frac{\partial U}{\partial y_0}\overline{j}+\frac{\partial U}{\partial z_0}\overline{k}\right). \qquad (3.2)$$

Формулы, аналогичные (3.1) и (3.2), справедливы для гравитационного потенциала, создаваемого массами, распределенными по поверхности σ, и для силы, с которой эта поверхность притягивает точечную массу. При этом постоянная k_0 должна быть заменена на гравитационную постоянную γ_0, плотность зарядов $\gamma(x,y,z)$ на плотность масс $\mu(x,y,z)$, величина заряда q на точечную массу m. Формула силы имеет следующий вид:
$\overline{F}=m\,\overline{\operatorname{grad}}\,U(x_0, y_0, z_0)$. Отсутствие минуса в выражении для силы объясняется тем, что гравитационное и электростатическое взаимодействия имеют различный характер: массы притягиваются, тогда как одноименные заряды отталкиваются.

Пример 3.7. Найти потенциал электростатического поля равномерно заряженной сферы. Плотность заряда $\gamma=\text{const}$, радиус сферы R.

Найдем потенциал в точке A, находящейся на расстоянии l от центра сферы. Введем систему декартовых координат так, чтобы точка A лежала на положительной полуоси Oz $A(0,0,l)$. Значение потенциала в точке A есть сумма потенциалов U_1 и U_2, создаваемых верхней и нижней полусферами σ_1 и σ_2. Каждая из полусфер проецируется на круг D $x^2+y^2<R^2$ в плоскости xOy; их уравнения: $z=\pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, отсюда $\frac{\partial z}{\partial x}=$ $=\mp\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\mp\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$. По формуле (3.1)

получаем

$$U_1(A) = k_0\gamma \iint\limits_{\sigma_1} \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}} =$$

$$= k_0\gamma \iint\limits_{D} \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\;\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+(\sqrt{R^2-x^2-y^2}-l)^2}} =$$

$$= k_0\gamma R \iint\limits_{D} \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}\;\sqrt{R^2+l^2-2l\sqrt{R^2-x^2-y^2}}} =$$

$$= k_0\gamma R \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} \frac{r\,dr}{\sqrt{R^2-r^2}\;\sqrt{R^2+l^2-2l\sqrt{R^2-r^2}}} =$$

$$= -2\pi k_0\gamma R \int\limits_0^{R} \frac{d(\sqrt{R^2-r^2})}{\sqrt{R^2+l^2-2l\sqrt{R^2-r^2}}} =$$

$$= \frac{-2\pi k_0\gamma R}{-2l}\; 2\sqrt{R^2+l^2-2l\sqrt{R^2-r^2}}\,\Bigg|_{r=0}^{r=R} =$$

$$= \frac{2\pi k_0\gamma R}{l}\left(\sqrt{R^2+l^2}-\sqrt{R^2+l^2-2lR}\right) =$$

$$= \frac{2\pi k_0\gamma R}{l}\left(\sqrt{R^2+l^2}-|R-l|\right).$$

Аналогично находим U_2 :

$$U_2(A) = k_0\gamma \iint\limits_{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+(z-l)^2}} = k_0\gamma R \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \times$$

$$\times \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2+(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}-l)^2}} = k_0\gamma R \iint\limits_{D} \frac{1}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \times$$

$$= \frac{dx\,dy}{\sqrt{R^2+l^2+2l\sqrt{R^2-x^2-y^2}}} =$$

$$= -\frac{2\pi k_0\gamma R}{2l}\; 2\sqrt{R^2+l^2+2l\sqrt{R^2-r^2}}\;\Bigg|_{r=0}^{r=R} =$$

$$= \frac{2\pi k_0\gamma R}{l}\left(\sqrt{R^2+l^2+2lR}-\sqrt{R^2+l^2}\right) = \frac{2\pi k_0\gamma R}{l}\left(R+l-\sqrt{R^2+l^2}\right).$$

Таким образом,

$$U(A) = U_1(A)+U_2(A) = \frac{2\pi k_0\gamma R}{l}\left(R+l-|R-l|\right). \tag{3.3}$$

Проделанные выкладки справедливы при $l \neq 0$. При $l = 0$, т.е. в центре сферы, потенциал может быть найден из соображений непрерывности: $U\big|_{l=0} = \lim\limits_{l\to 0} U(0,0,l) = \lim\limits_{l\to 0}\left(\frac{2\pi k_0\gamma R}{l}(R+l-R+l)\right) = 4\pi k_0\gamma R$, либо легко вычислен непосредственно:

$$U\big|_{l=0} = k_0\gamma \iint\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{k_0\gamma}{R}\iint\limits_{\sigma} d\sigma = \frac{k_0\gamma}{R}\,4\pi R^2 = 4\pi k_0\gamma R.$$

Проанализируем полученную формулу (3.3). Если точка A находится внутри сферы, т.е. $l \le R$, то $|R-l| = R-l$ и $U(A) = \frac{2\pi k_0\gamma R}{l}(R+l-R+l) = 4\pi k_0\gamma R$.

Потенциал внутри сферы не зависит от l. Таким образом, во всех точках внутри сферы потенциал одинаковый и сила, действующая на заряд, помещенный внутрь сферы, равна 0: $\vec F = -q\,\mathrm{grad}\,U = \vec 0$.

Если точка находится вне сферы ($l \ge R$), то $|R-l| = l-R$ и

$$U(A) = \frac{2\pi k_0\gamma R}{l}(R+l+R-l) = \frac{4\pi k_0\gamma R^2}{l} = \frac{k_0 Q}{l},$$

где $Q = 4\pi R^2\cdot\gamma$ – полный заряд сферы. В этом случае потенциал (либо сила, действующая на заряд) совпадает с потенциалом (либо силой), создаваемым зарядом Q, помещенным в центр сферы.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $\iint\limits_{\sigma}\left(\frac{1}{2}(x+y)^2-y^2-z\right)d\sigma$.

где σ - часть параболоида $z=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$; $0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$.

2. Найти $\iint\limits_{\sigma}(x-y+z)\,d\sigma$, где σ - треугольник с вершинами (2,0,0), (0,-2,0), (0,0,2).

3. Найти $\iint\limits_{\sigma}\frac{z\,d\sigma}{x^2\sqrt{y^4+1}}$, где σ - часть цилиндра $xy=1$, отсекаемая плоскостями $x+y=\frac{5}{2}$, $z=0$, $z=1$.

4. Найти $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)\,d\sigma$, где σ - полная поверхность тела $\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1$.

5. Найти $\iint\limits_{\sigma}|z|\,d\sigma$, где σ - сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$.

6. Найти $\iint\limits_{\sigma}y^2\,d\sigma$, где σ - часть цилиндра $y^2+z^2=R^2$, $0\leqslant x\leqslant H$.

7. Найти координаты центра масс однородной полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geqslant 0$.

8. Найти момент инерции относительно оси Oz конуса $x^2+y^2=z^2$, $0\leqslant z\leqslant H$, если плотность равна квадрату расстояния до вершины.

9. Найти величину силы, действующей на точечный заряд q, помещенный в центр основания конуса, боковая поверхность которого заряжена. Радиус основания конуса R, высота H. Поверхностная плотность заряда пропорциональна кубу расстояния до центра основания, коэффициент пропорциональности равен α.

Глава 4. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ 2-ГО РОДА

§ I. Определение поверхностного интеграла 2-го рода

Поверхность σ в трехмерном пространстве называется двусторонней, если нормаль к поверхности при обходе по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности и не имеющему общих точек с ее границей, возвращается в первоначальное положение. Выбор направления нормали, т.е. выбор определенной стороны поверхности, называется ориентацией поверхности. Будем полагать, что в каждой точке M ориентированной поверхности σ направление нормали задано единичным вектором $\vec{n}^0(M)=\cos\alpha\cdot\vec{i}+\cos\beta\cdot\vec{j}+\cos\gamma\cdot\vec{k}$, направляющие косинусы которого являются непрерывными функциями координат точек поверхности.

Пусть на поверхности σ задано векторное поле

$$\overline{F}=P(x,y,z)\overline{i}+Q(x,y,z)\overline{j}+R(x,y,z)\overline{k}.$$

Разобьем поверхность σ аналогично тому, как это было сделано в гл. 3, на элементарные площадки $\Delta\sigma_k$, $k=1,\dots,n$, площади которых равны ΔS_k соответственно. На каждой площадке выберем точку M_k и рассмотрим интегральную сумму:

$$S(\overline{F},T)=\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}(M_k),\overline{n}^{\circ}(M_k))\cdot\Delta S_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\overline{F}(M_k),\Delta\overline{S}_k),$$

где под знаком суммы стоит скалярное произведение векторов.

<u>Определение</u>. Предел интегральных сумм $S(\overline{F},T)$ при стремлении диаметра разбиения $d(T)$ к 0, если он существует и не зависит от способа разбиения поверхности σ и выбора точек M_k, называется поверхностным интегралом 2-го рода и обозначается

$$\iint_{\sigma}\overline{F}\,d\overline{\sigma}=\iint_{\sigma}P\,dy\,dz+Q\,dx\,dz+R\,dx\,dy=$$

$$=\lim_{d(T)\to 0}S(\overline{F},T).$$

<u>Теорема</u>. Пусть векторное поле $\overline{F}$ непрерывно на кусочно-гладкой ориентированной поверхности σ. Тогда интеграл $\iint_{\sigma}\overline{F}\,d\overline{\sigma}$ существует.

В дальнейшем все рассматриваемые векторные поля будем предполагать непрерывными.

Из определения непосредственно следует, что поверхностный интеграл 2-го рода может быть выражен через поверхностный интеграл I-го рода:

$$\iint_{\sigma}\overline{F}\,d\overline{\sigma}=\iint_{\sigma}(\overline{F},\overline{n}^{\circ})\,d\sigma=\iint_{\sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,d\sigma. \qquad (4.1)$$

Если вектор $\overline{F}$ трактовать как скорость жидкости (газа), то каждое слагаемое интегральной суммы

$$(\bar{F}(M_k),\ \bar{n}^\circ(M_k))\,\Delta S_k = |\bar{F}(M_k)|\cos(\widehat{\bar{F},\bar{n}^\circ})\,\Delta S_k$$

может быть интерпретировано как количество жидкости (газа), протекающее через площадку $\Delta\sigma_k$ в направлении нормали $\bar{n}^\circ$. Тогда интеграл $\iint\limits_\sigma \bar{F}\,d\bar{\sigma}$ определяет общее количество жидкости (газа), протекающей в единицу времени через всю поверхность σ. Поэтому поверхностный интеграл 2-го рода называется также потоком векторного поля $\bar{F}$ через поверхность σ.

§ 2. Свойства поверхностного интеграла 2-го рода

1. Линейность:

$$\iint\limits_\sigma (\bar{F}_1+\bar{F}_2)\,d\bar{\sigma} = \iint\limits_\sigma \bar{F}_1\,d\bar{\sigma} + \iint\limits_\sigma \bar{F}_2\,d\bar{\sigma},$$

$$\iint\limits_\sigma c\bar{F}\,d\bar{\sigma} = c\iint\limits_\sigma \bar{F}\,d\bar{\sigma},\quad c=\mathrm{const}.$$

2. Аддитивность. Если поверхность σ разбить на неперекрывающиеся поверхности σ_1 и σ_2, то

$$\iint\limits_\sigma \bar{F}\,d\bar{\sigma} = \iint\limits_{\sigma_1} \bar{F}\,d\bar{\sigma} + \iint\limits_{\sigma_2} \bar{F}\,d\bar{\sigma}.$$

3. Зависимость от ориентации поверхности. Если σ - двусторонняя поверхность и стороне σ_+ соответствует нормаль $\bar{n}^\circ$, а стороне σ_- - нормаль $(-\bar{n}^\circ)$, то

$$\iint\limits_{\sigma_+} \bar{F}\,d\bar{\sigma} = -\iint\limits_{\sigma_-} \bar{F}\,d\bar{\sigma},$$

т.е. при переходе на другую сторону поверхности поверхностный интеграл 2-го рода меняет свой знак на противоположный.

§ 3. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода

1. Пусть D_1, D_2, D_3 - проекции поверхности σ на координатные плоскости yOz, xOz, xOy соответственно. Заметим, что величина $\cos\alpha\cdot d\sigma$ из подынтегрального выражения (4.1) имеет простой геометрический смысл. Пусть $d\sigma$ - площадь элементарной площадки на σ, тогда произведение $\cos\alpha\cdot d\sigma$ равно площади проекции этой площадки на плоскость yOz, если $\cos\alpha>0$.

и отличается от площади проекции знаком, если $\cos\alpha < 0$. Точно так же произведения $\cos\beta \cdot d\sigma$, $\cos\gamma \cdot d\sigma$ с точностью до знака совпадают с площадями проекций элементарной площадки на плоскости xOy, xOz соответственно. Таким образом, вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению суммы трех двойных интегралов:

$$\iint_{\sigma} \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \pm \iint_{D_1} P(x(y,z), y, z)\, dy\, dz \pm$$

$$\pm \iint_{D_2} Q(x, y(x,z), z)\, dx\, dz \pm \iint_{D_3} R(x, y, z(x,y))\, dx\, dy.$$

Знак перед каждым из двойных интегралов определяется знаком соответствующего направляющего косинуса, а именно: перед интегралом берется знак плюс, если направляющий косинус положителен (т.е. нормаль образует острый угол с соответствующей координатной осью); перед интегралом берется знак минус, если направляющий косинус отрицателен (угол - тупой).

Пример 4.1. Вычислить $\iint_{\sigma} \bar{F}\, d\bar{\sigma}$, где $\bar{F} = (x+z)\bar{i} + (8y - x)\bar{j} + (2x^2 - y)\bar{k}$, σ - часть поверхности цилиндра $y = \frac{x^2}{4}$, заключенная между плоскостями $x = 0$, $x = 8$, $z = 0$, $z = 3$. Сторона поверхности выбирается так, чтобы нормаль образовала острый угол с осью Ox (рис. 19).

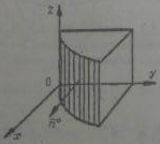

Рис. 19

Определяем знаки направляющих косинусов нормали: $\cos\alpha > 0$, $\cos\beta < 0$, $\cos\gamma = 0$. Поэтому

$$\iint_\sigma \bar F d\bar\sigma = \iint_\sigma (x+z)dydz + (8y-x)\,dx\,dz +$$

$$+(2x^2-y)dxdy = \iint_{D_1}(x(y,z)+z)dydz - \iint_{D_2}(8y(x,z)-$$

$$-x)dx\,dz,$$

где $D_1=\{(y,z): 0\le y\le 16,\ 0\le z\le 3\}$, $D_2=\{(x,z): 0\le x\le 8,\ 0\le z\le 3\}$ – проекции σ на плоскости yOz и xOz соответственно. Проекция поверхности σ на плоскость xOy вырождается в линию – параболу $y=\frac{x^2}{4}$, $\cos\gamma = 0$, поэтому интеграл по D_3 в данном случае отсутствует. Вычислим отдельно интегралы по D_1 и D_2, определив $x(y,z)$ и $y(x,z)$ из уравнения поверхности σ, т.е. $x(y,z)=2\sqrt{y}$, $y(x,z)=x^2/4$,

$$\iint_{D_1}(x(y,z)+z)dy\,dz = \iint_{D_1}(2\sqrt{y}+z)dy\,dz =$$

$$=\int_0^3 dz\int_0^{16}(2\sqrt{y}+z)dy = 328.$$

$$\iint_{D_2}(8y(x,z)-x)dx\,dy = \iint_{D_2}(2x^2-x)\,dx\,dz =$$

$$=\int_0^3 dz\int_0^8(2x^2-x)dx = 928.$$

Отсюда $\iint \bar F\, d\bar\sigma = 328 - 928 = -600.$

2. Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению поверхностного интеграла I-го рода:

$$\iint_\sigma \bar F d\bar\sigma = \iint_\sigma (F,\bar n^\circ)d\sigma = \iint_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)d\sigma.$$

Пример 4.2. Найти $\iint_\sigma \bar F\, d\bar\sigma$, где $\bar F = \dfrac{x\bar i + y\bar j + z\bar k}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, σ – сфера $x^2+y^2+z^2=R^2$ (нормаль – внешняя).

Определим внешнюю нормаль $\bar n^\circ$ к сфере σ:

$$\bar{n}^0 = \frac{\overline{\text{grad}}\, f(x,y,z)}{|\overline{\text{grad}}\, f(x,y,z)|},$$

где $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2$, $\overline{\text{grad}}\, f(x,y,z) = f'_x \bar{i} + f'_y \bar{j} + f'_z \bar{k}$;

$$\bar{n}^0 = \frac{x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}.$$

Получаем

$$(\bar{F}, \bar{n}^0) = \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}.$$

Тогда

$$\iint_\sigma \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iint_\sigma \frac{d\sigma}{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{R^2}\iint_\sigma d\sigma = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi.$$

<u>Пример 4.3</u>. Найти поток векторного поля $\bar{F} = x^2\bar{i} - y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через всю поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$, $x^2 + y^2 \le z + 2$, $z \geqslant 0$ в направлении внешней нормали (рис. 20).

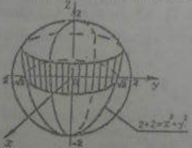

Рис. 20

Имеем

$$\iint_\sigma \bar{F}\, d\bar{\sigma} = \iint_\sigma x^2 dy\,dz - y^2 dx\,dz + z^2 dx\,dy =$$

$$= \iint_\sigma (x^2\cos\alpha - y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Рассмотрим интеграл $\iint\limits_{\sigma} x^2 \cos\alpha \, d\sigma$. Поверхность σ можно разбить на две части σ_+ и σ_-, симметричные относительно плоскости yOz и удовлетворяющие условиям $x > 0$ и $x < 0$ соответственно. Значения $\cos\alpha$ в произвольной точке поверхности σ_+ и в симметричной ей точке поверхности σ_- отличаются знаком, причем $\cos\alpha > 0$ на σ_+ и $\cos\alpha < 0$ на σ_-. Поэтому

$$\iint\limits_{\sigma} x^2 \, dy \, dz = \iint\limits_{\sigma} x^2 \cos\alpha \, d\sigma = \iint\limits_{\sigma_+} x^2 \cos\alpha \, d\sigma +$$

$$+ \iint\limits_{\sigma_-} x^2 \cos\alpha \, d\sigma = 0.$$

В силу симметрии поверхности σ относительно плоскости xOz имеем

$$\iint\limits_{\sigma} y^2 \, dx \, dz = \iint\limits_{\sigma} y^2 \cos\beta \, d\sigma = 0.$$

Вычислим интеграл $\iint\limits_{\sigma} z^2 \, dx \, dy = \iint\limits_{\sigma} z^2 \cos\gamma \, d\sigma$.

Поверхность σ состоит из сегмента σ_1 сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, части σ_2 параболоида $x^2 + y^2 = z + 2$ и части σ_3 плоскости $z = 0$. Очевидно, что $\iint\limits_{\sigma_3} z^2 \, dx \, dy = 0$. Найдем проекции σ_1 и σ_3 на плоскость xOy. Исключая z из системы уравнений

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

$$x^2 + y^2 = z + 2,$$

получим $x^2 + y^2 = 3$ – уравнение проекции линии пересечения сферы и параболоида на xOy. Полагая $z = 0$ в уравнении параболоида, находим $x^2 + y^2 = 2$. Таким образом, сферический сегмент проецируется в круг D $x^2 + y^2 = 3$, часть параболоида – в кольцо D' $2 \le x^2 + y^2 \le 3$. Для сегмента сферы σ_1 имеем $\cos\gamma > 0$, $z^2(x, y) = 4 - x^2 - y^2$. Поэтому

$$\iint\limits_{\sigma_1} z^2 \, dx \, dy = \iint\limits_{D} (4 - x^2 - y^2) \, dx \, dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{3}} (4 - r^2) r \, dr =$$

$$= 2\pi \left(2r^2 - \frac{1}{4} r^4\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = 2\pi \left(6 - \frac{9}{4}\right) = \frac{15\pi}{2}.$$

На части параболоида σ_2 имеем $\cos\gamma < 0$, $z^2(x,y) = (x^2+y^2-2)^2$, отсюда

$$\iint_{\sigma_2} z^2\,dx\,dy = -\iint_{D'} (x^2+y^2-2)^2\,dx\,dy =$$

$$= -2\pi\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} (r^2-2)^2 r\,dr = -2\pi\frac{(r^2-2)^3}{6}\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = -\frac{\pi}{3}.$$

Таким образом,

$$\iint_{\sigma} z^2\,dx\,dy = \iint_{\sigma_1} z^2\,dx\,dy + \iint_{\sigma_2} z^2\,dx\,dy = \frac{15\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{43\pi}{6}.$$

Окончательный результат:

$$\iint_{\sigma} \bar{F}\,d\bar{\sigma} = \frac{43\pi}{6}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти поток векторного поля $\bar{F} = x^2\bar{i} + y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через часть поверхности параболоида $z = x^2+y^2$, $z \le 1$ в направлении внешней нормали.

2. Найти поток векторного поля $\bar{F} = x^2\bar{i} - y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через часть сферы, находящуюся в первом октанте, в направлении внутренней нормали.

3. Найти $\iint_{\sigma} x\,dy\,dz + y\,dx\,dz - 2z\,dx\,dy$, где σ - полная поверхность куба $|x| \le 1$, $|y| \le 1$, $|z| \le 1$ (внешняя сторона).

4. Найти поток векторного поля $\bar{F} = 2x^2\bar{i} + 3y^2\bar{j} + z^2\bar{k}$ через полную поверхность тела $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}$ в направлении внешней нормали.

5. Найти $\iint_{\sigma} \bar{F}\,d\bar{\sigma}$, где $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, σ - часть параболоида $z = x^2 - y^2$, $0 \le x \le 1$, $z \ge 0$, нормаль образует тупой угол с осью Oz.

ОТВЕТЫ

Глава 2

1. 1. 2. $\ln \dfrac{\sqrt{26}+\sqrt{35}}{5}$. 3. $2\ln \operatorname{tg} \dfrac{3\pi}{8}$.
4. $\sqrt{5}\,(e^{2\pi}-1)$. 5. π. 6. 0/5. 7. 47/60. 8. -2π. 9. 1/4.
10. 62. 11. $-46\,\dfrac{2}{3}$.

Глава 3

1. $(3^{5/2}/2 - 2^{5/2} + 1/2)/15$. 2. $4\sqrt{3}$. 3. 3/4.
4. $\pi(1+\sqrt{2})/2$. 5. $2\pi R^3$. 6. $\pi R^3 H$. 7. $(0, 0, \frac{R}{2})$.
8. $\pi\sqrt{2}$. 9. $k_0 \alpha q H R \sqrt{H^2+R^2}$. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi$.

Глава 4

1. $-\pi/3$. 2. $-\pi/8$. 3. 0. 4. π. 5. 1/3.

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

Задача 1. Дана кривая C плотности μ (см. табл. 1). В вариантах 1...10 найти момент инерции кривой C относительно начала координат. В вариантах 11...20 найти массу кривой C. В вариантах 21...30 найти координаты центра масс кривой C.

Задача 2. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy$, убедившись в том, что подынтегральное выражение является полным дифференциалом (см. табл. 2).

Задача 3. В вариантах 1...15 вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, убедившись в том, что подынтегральное выражение - полный дифференциал. В вариантах 16...30 найти функцию $u(x, y, z)$ по ее полному дифференциалу $du = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, убедившись предварительно в том, что данное выражение является полным дифференциалом (см. табл. 3).

Задача 4. Вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_{C} P\,dx + Q\,dy$ по замкнутому контуру C. Проверить ответ по формуле Грина. Направление обхода контура - положительное (см. табл. 4).

Задача 5. Дана часть поверхности σ, вырезаемая поверхностями S. Плотность поверхности σ равна μ (см. табл. 5). В вариантах 1...10 найти массу поверхности σ. В вариантах 11...20 найти координаты центра масс поверхности σ. В вариантах 21...30 найти моменты инерции поверхности σ относительно осей координат и начала координат.

Задача 6. Найти поток векторного поля $\overline{F}$ через часть плоскости σ, ограниченную координатными плоскостями. Сторона плоскости определяется нормалью, образующей острый угол с указанной осью координат (см. табл. 6).

Задача 7. Найти поток векторного поля $\overline{b}$ через незамкнутую поверхность σ. Сторона поверхности определяется нормалью $\overline{n}$, образующей заданный угол с заданной осью координат (см. табл. 7).

Таблица 1

№ вар.	Плотность μ	Уравнение кривой C	
1	2	3	
1	$\cos\frac{\varphi}{2}$	$r = 1-\cos\varphi$;	$0 \le \varphi \le \pi$
2	$\cos\varphi\sqrt{4-3\sin^2\varphi}$	$r = 4\sin^2\varphi$;	$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$
3	$9\operatorname{ctg} 3\varphi$	$r = \sin 3\varphi$;	$\frac{\pi}{9} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$
4	z	$x = \cos t$; $y = \sin t$; $z = 2t$;	$0 \le t \le 2\pi$
5	$\frac{1}{x}$	$x = e^t$; $y = e^t\cos t$; $z = e^t\sin t$;	$0 \le t \le 2\pi$
6	$\frac{1}{\sqrt{81x^2+y^2}}$	$x = \cos t$; $y = 3\sin t$;	$y \ge 0$